第4講　微分法，積分法②

1　放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を A$(a,0)$，B$(b,0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を P$(\alpha,\ m\alpha)$，Q$(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1-|x-1|)$ のグラフが，直線 $x=a$ を軸とする放物線 $y=g(x)$ と2つの点で接している．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3) $f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフとによって囲まれた図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3 原点を通る傾きが正の直線 l を考える．いま点Pが原点から直線 l に沿って第１象限を直進し，直線 l と曲線 $C：y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$ の交点 $\mathrm{Q}\left(a, \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}\right)$ で反射した後，再び直進する．ただし，点Qにおいて，C の接線に対し，入射角と反射角は等しいとする．反射後の点Pの進行方向が y 軸と平行になるとき，次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 点Qにおける接線と曲線 C が囲む図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第４講　微分法，積分法②

1　放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を A$(a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を P$(\alpha,\ m\alpha)$，Q$(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ．

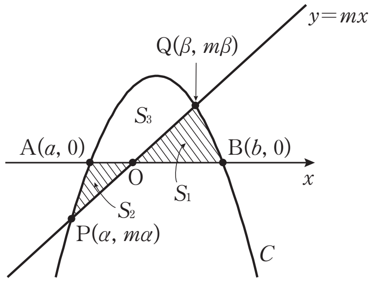
$-x^2+2x+1=0$ の２解が，$x=a$，b $(a<b)$ であるので　$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$

また，$-x^2+2x+1=mx$　つまり　$x^2+(m-2)x-1=0$ の２解が，$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ であるので　$\alpha=\dfrac{2-m-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$，　$\beta=\dfrac{2-m+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$

右図のように S_1，S_2，S_3 を定めると，$S_1=S_2$ より $S_1+S_3=S_2+S_3$

$$S_1+S_3=\int_a^b(-x^2+2x+1)dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)dx$$

$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}\right)^3$$



$$S_2+S_3=\int_\alpha^\beta(-x^2+(2-m)x+1)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3$$

よって　$\dfrac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3=\dfrac{1}{6}\left(2\sqrt{2}\right)^3$　　$(m-2)^2+4=8$　　$m-2=\pm 2$

ゆえに　$\boldsymbol{m=4}$

2　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1-|x-1|)$ のグラフが，直線 $x=a$ を軸とする放物線 $y=g(x)$ と２つの点で接している．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $g(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3)　$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフとによって囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$f(x)=\begin{cases}1\ (x\geqq 1)\\ x\ (x<1)\end{cases}$

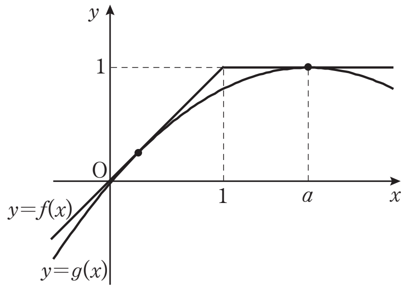
題意より　$g(x)=p(x-a)^2+1\ (a>1)$とおける．

これが$y=x$と接するので

$p(x-a)^2+1=x$　　つまり

$px^2-(2ap+1)x+pa^2+1=0$　……①

が重解をもつ．



$(2ap+1)^2-4p(pa^2+1)=0$　よって　$p=-\dfrac{1}{4(a-1)}$

このとき①は 重解　$x=\dfrac{2ap+1}{2p}=a+\dfrac{1}{2p}=-a+2$　をもつ.

$a>1$より　$-a+2<1$ よって，条件を満たす.　ゆえに　$\boldsymbol{g(x)=-\dfrac{1}{4(a-1)}(x-a)^2+1}$

(2)　$g(x)$のグラフと x 軸との交点の x 座標は

$-\dfrac{1}{4(a-1)}(x-a)^2+1=0$　より　$(x-a)^2=4(a-1)$　　$x=a\pm2\sqrt{a-1}$

よって，求める線分の長さは　$(a+2\sqrt{a-1})-(a-2\sqrt{a-1})=\boldsymbol{4\sqrt{a-1}}$

(3)　求める面積は

$$\int_{-a+2}^{1}\{x-g(x)\}dx+\int_{1}^{a}\{1-g(x)\}dx$$

$$=-p\int_{-a+2}^{1}\{x-(-a+2)\}^2dx-p\int_{1}^{a}(x-a)^2dx$$

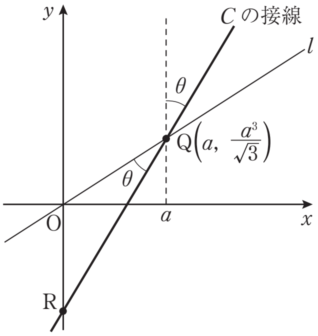
$$=-p\left[\frac{1}{3}(x+a-2)^3\right]_{-a+2}^{1}-p\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{1}^{a}$$

$$=-\frac{p}{3}(a-1)^3+\frac{p}{3}(1-a)^3=-\frac{2}{3}p(a-1)^3=-\frac{2}{3}\left\{-\frac{1}{4(a-1)}\right\}(a-1)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a-1)^2}$$

3　原点を通る傾きが正の直線 l を考える．いま点 P が原点から直線 l に沿って第 1 象限を直進し，直線 l と曲線 $C:y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$ の交点 $\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}\right)$ で反射した後，再び直進する．ただし，点 Q において，C の接線に対し，入射角と反射角は等しいとする．反射後の点 P の進行方向が y 軸と平行になるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　点 Q における接線と曲線 C が囲む図形の面積を求めよ．



(1)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3$　より　$y'=\sqrt{3}\,x^2$

点 Q における接線の方程式は　$y=\sqrt{3}\,a^2(x-a)+\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$

つまり　$y=\sqrt{3}\,a^2x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$　よって　$\mathrm{R}\left(0,\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}a^3\right)$

△ORQ は二等辺三角形より　OR＝OQ

ゆえに　$\mathrm{OR}^2=\mathrm{OQ}^2$　つまり　$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}a^3\right)^2=a^2+\dfrac{1}{3}a^6$

$\dfrac{4}{3}a^6=a^2\cdot\dfrac{a^4+3}{3}$　　$4a^4=a^4+3$　　$a^4=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3=\sqrt{3}\,x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　より　$x^3-3x+2=0$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　$x=1,\ -2$

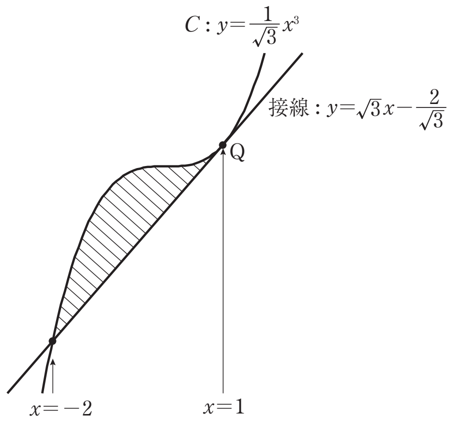
よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{81}{4}-27\right)=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$



第４講　微分法，積分法②　練習問題

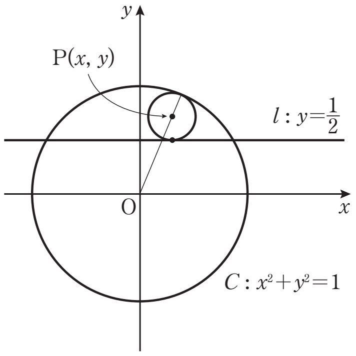
1　円 $x^2+y^2=1$ を C とし，直線 $y=\frac{1}{2}$ を l とする．C に内接し l に接する円の中心を P とする．P の軌跡のうち y 座標が $\frac{1}{2}$ より大きい部分と l によって囲まれる図形の面積を求めよ．

2　xy 平面において，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が曲線 $y=x-|x|+1$ と異なる 2 点で接しているとする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=x-|x|+1$ および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ によって囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

第 4 講　微分法，積分法②　　練習問題　解答

1　円$x^2+y^2=1$をCとし，直線$y=\dfrac{1}{2}$をlとする．Cに内接しlに接する円の中心をPとする．Pの軌跡のうちy座標が$\dfrac{1}{2}$より大きい部分とlによって囲まれる図形の面積を求めよ．

解答例



lに接する円の中心をP$(x,\ y)$とすると，

半径は$\left|y-\dfrac{1}{2}\right|$と表すことができる．

この円が円Cに内接することより

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-\left|y-\frac{1}{2}\right|$$

$y>\dfrac{1}{2}$の部分では　$\left|y-\dfrac{1}{2}\right|=y-\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}-y$$

$$x^2+y^2=\left(\frac{3}{2}-y\right)^2$$

よって　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{4}$　これがPの軌跡の方程式

$y>\dfrac{1}{2}$より　$-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}$　よって　Pは　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　の部分を動く．

したがって，点Pの軌跡とlによって囲まれる図形の面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

積分範囲がy軸対称であることを利用し，偶関数・奇関数の性質から

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}\right)dx$$

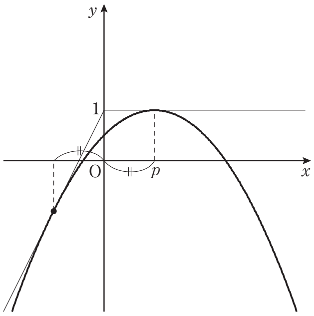
$$=2\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

という解法もあり．

2 xy 平面において，放物線 $y=ax^2+bx+c$ が曲線 $y=x-|x|+1$ と異なる 2 点で接しているとする．放物線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=x-|x|+1$ および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ によって囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

解答例



$$y=x-|x|+1=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}\quad \cdots\cdots①$$

$y=1$ と $y=ax^2+bx+c$　……②　が接することより

②は $y=a(x-p)^2+1$　$(a<0,\ p>0)$　……②$'$とおける．

また，②$'$で　$y'=2a(x-p)$

$$2a(x-p)=2 \text{ とすると }\quad x=p+\frac{1}{a}$$

このとき，②と $y=2x-1$ が接するのは y 座標が一致するときである．

つまり　$a\left(p+\dfrac{1}{a}-p\right)^2+1=2\left(p+\dfrac{1}{a}\right)+1$　　$p=-\dfrac{1}{2a}$ のとき．

よって，②$'$は　$y=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2+1$　と表すことができる．

①と②$'$，および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ によって囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\left\{2x+1-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-1\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{1-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-1\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left\{-a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{-a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{a}{3}\left(x-\frac{1}{2a}\right)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{a}{3}\left(x+\frac{1}{2a}\right)^3\right]_{0}^{1}$$

講義で扱った問題と異なり，「接点」が積分範囲の端点とはなっていないため，計算は若干煩雑となっている．

$$=-\frac{a}{3}\left(-\frac{1}{2a}\right)^3+\frac{a}{3}\left(-1-\frac{1}{2a}\right)^3-\frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2a}\right)^3+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2a}\right)^3$$

$$=-\frac{2}{3}a-\frac{1}{2a}-1$$

$a<0$ のとき　$S\geqq 2\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\left(-\dfrac{1}{2a}\right)}-1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$　　「相加平均≧相乗平均」

等号成立は　$-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{2a}$　　つまり　$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　のとき

よって，$a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　S の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}$